

Prawdopodobieństwo przejścia i efektywna liczba próbek cyfrowego sygnału z multipleksacją OFDM

Adam Rudziński

W artykule przedstawiono wyprowadzenie wyrażenia opisującego efektywną liczbę próbek sygnału cyfrowego z multipleksacją OFDM. Wyprowadzenie oparte jest na obliczeniu prawdopodobieństwa przejścia dla tego sygnału. Otrzymane wyrażenie wskazuje wprost zależności między efektywną liczbą próbek a parametrami sygnału i stanowi uzupełnienie modelu teoretycznego.

przetwornik cyfrowo-analogowy, multipleksacja OFDM, prawdopodobieństwo przejścia, efektywna liczba próbek

Wprowadzenie

Obecnie wykorzystuje się wiele różnorodnych urządzeń cyfrowych wytwarzających i przetwarzających różnego rodzaju informacje. Urządzenia te przesyłają między sobą dane, kodując je w postaci sygnałów, które przenoszone są przez obiekty fizyczne, takie jak pola czy prądy. W ostatnich latach dużą popularność zyskała technika kodowania nazywana ortogonalną multipleksacją w dziedzinie częstotliwości OFDM (*orthogonal frequency division multiplexing*), opracowana około 40 lat temu [1]–[3], a obecnie stosowana, np. w bezprzewodowych sieciach lokalnych WLAN czy naziemnej telewizji cyfrowej DVB-T. Metoda ta polega na kodowaniu przesyłanych danych na podnośnych o różnych częstotliwościach, które dobiera się tak, aby były one ortogonalne w przedziale czasu odpowiadającym jednemu symbolowi. Cechuje się ona odpornością na propagację wielodrogową, ale niesie ze sobą specyficzne problemy, związane np. z dużym stosunkiem mocy szczytowej do mocy średniej wytwarzanych sygnałów.

Niezbędnym etapem w transmisji jest konwersja sygnału z postaci cyfrowej (właściwej urządzeniu) do postaci analogowej (fizycznej), która dokonuje się w przetworniku cyfrowo-analogowym (C/A). Nadawany sygnał analogowy jest zbliżony do postaci idealnej, ale zawsze zawiera różnego rodzaju szumy i zniekształcenia. W szczególności, sygnał z multipleksacją OFDM podlega ograniczeniu do zakresu przetwornika [4] oraz kwantyzacji i zniekształceniu przez niedoskonałości odwzorowania poziomów przetwornika [5, 6]. Degradacja sygnału wskutek tych efektów jest zależna od jego mocy, rozdzielczości przetwornika C/A (narzucającego precyzję reprezentacji liczb), nieliniowości przetwornika C/A oraz liczby próbek sygnału. Ogólny model matematyczny uwzględniający te efekty przedstawiono w artykule [6]. Pokazano tam także, że wpływ przetwornika (tj. szum kwantyzacji i zniekształcenia nieliniowe) można zmniejszać przez zwiększanie liczby próbek sygnału (nadpróbkowanie), przy czym zniekształcenia nieliniowe podlegają zmniejszeniu tylko częściowo i zależą od zdefiniowanej w [6] efektywnej liczby próbek.

W artykule [6] efektywną liczbę próbek wyznaczano na drodze symulacji numerycznych, natomiast w tym artykule jest przedstawione wyprowadzenie przybliżonego, ale dosyć dokładnego wzoru wyrażającego tę wielkość przez parametry sygnału i przetwornika. Wyprowadzenie to opiera się na obliczeniu prawdopodobieństwa przejścia dla sygnału, tj. prawdopodobieństwa tego, że w dwóch określonych chwilach sygnał przyjmuje zadane wartości. Otrzymany wzór, co jest właściwe wyrażeniom

analitycznym, pokazuje wprost zależność od parametrów sygnału (częściowo zdeterminowanych przez przetwornik C/A) i w ten sposób stanowi kompletny opis jednego z mechanizmów występujących w zagadnieniu przetwarzania sygnałów cyfrowych do postaci analogowej.

Definicje i założenia

Rozważany jest rzeczywisty, cyfrowy sygnał z multipleksacją OFDM, podawany na przetwornik C/A o rozdzielczości n bitów. Sygnał taki powstaje w wyniku dyskretyzacji i kwantyzacji idealnego przebiegu symbolu OFDM, utworzonego przez złożenie K zmodulowanych podnośnych:

$$x(t) = \sum_{k=1}^K A_k \cos(\omega_k t + \phi_k). \quad (1)$$

Symbole na poszczególnych podnośnych koduje się poprzez ich amplitudy A_k i fazy ϕ_k , które są stałe w czasie trwania symbolu OFDM, wynoszącym T_S . Dla uproszczenia wyprowadzeń zostanie przyjęte, że A_k i ϕ_k są niezależnymi zmiennymi losowymi, amplitudy $A_k \in \mathbb{R}_+$ a ich rozkłady prawdopodobieństwa są jednakowe, fazy ϕ_k zaś mają rozkład jednostajny na podzbiore przedziału $[0; 2\pi)$ oraz dla każdego k zachodzi $\langle e^{j\phi_k} \rangle = \langle e^{2j\phi_k} \rangle = 0$. Pulsacje podnośnych ω_k dobrane są w taki sposób, aby odpowiadające im przebiegi były ortogonalne na przedziale o długości równej czasowi trwania symbolu OFDM. W wyprowadzeniach wystarczy ograniczyć się do pojedynczego symbolu OFDM. Pominęta zostaje składowa stała, która jest w przedstawionym wyprowadzeniu nieistotna; wówczas można przyjąć $\omega_k = k\omega_1$, gdzie $\omega_1 = 2\pi/T_S$. Przy przyjętych założeniach średni kwadrat $\langle A_k^2 \rangle$ ma jednakową wartość dla każdej z podnośnych, a więc średnia moc symbolu OFDM wynosi

$$\sigma^2 = K \frac{\langle A_k^2 \rangle}{2}. \quad (2)$$

Zdyskretyzowaną postacią rozważanego symbolu OFDM jest ciąg

$$x_i \equiv x(iT), \quad i = 0, 1, \dots, N_S - 1, \quad (3)$$

gdzie: i indeksuje kolejne próbki, $T = T_S/N_S$ jest okresem próbkowania, N_S – liczbą próbek. Gęstość dyskretyzacji (nadpróbkowanie) określa stosunek N_S/K , który – przy spełnieniu kryterium Nyquista – wynosi co najmniej 2. Sygnał x_i można z dobrym przybliżeniem traktować jako proces stochastyczny, którego próbki są niezależnymi zmiennymi losowymi. Z centralnego twierdzenia granicznego wynika, że gęstość prawdopodobieństwa przyjęcia przez próbkę wartości x dana jest rozkładem Gaussa z wariancją określoną przez średnią moc sygnału (2):

$$P(x_i = x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right). \quad (4)$$

W urządzeniach cyfrowych liczby reprezentowane są ze skończoną dokładnością, w szczególności przetwarzanie przez przetwornik C/A o rozdzielczości n bitów najwygodniej jest modelować jako zaokrąglanie (kwantyzację) sygnału wejściowego do wartości całkowitych ze zbioru $\mathbb{Z}_n = \{-2^{n-1}, \dots, 2^{n-1} - 1\}$, zwanych dalej poziomami. Dzięki temu sygnał wyjściowy można wprost (bez dodatkowych przeskalowań i przesunięć) porównywać z sygnałem wejściowym. Amplituda sygnału wyjściowego jest ograniczona, co powoduje ograniczanie fragmentów sygnału wejściowego przekraczających tę wartość.

Moc sygnału można odnieść do zakresu przetwornika definiując współczynnik $\alpha = 2^{n-1}/\sigma$. Wartość tego współczynnika określa zakres dynamiczny sygnału, a w praktyce rozsądnym wyborem jest $\alpha \approx 4$.

Według powyższych ustaleń, aby otrzymać cyfrową reprezentację przebiegu symbolu OFDM należy poddać go kwantyzacji, która przekształca go do postaci schodkowej

$$x_i^q = x_i + \Delta_i^q, \quad \text{gdzie } x_i^q \in \mathbb{Z}_n : |x_i^q - x_i| = \min_{y \in \mathbb{Z}_n} |y - x_i|, \quad (5)$$

Δ_i^q zaś jest błędem (szumem) kwantyzacji. Prawdopodobieństwo przyjęcia tej samej wartości przez kolejne próbki sygnału cyfrowego x_i^q jest niezerowe, a jak pokazano w [6], ma to wpływ na szybkozmienną część zniekształceń nieliniowych powodowanych przez przetwornik C/A. Pokazano tam także, że część szybkozmienna tych zniekształceń zależy od efektywnej liczby próbek, zdefiniowanej jako

$$N_{\text{eff}} = \frac{N_S}{\langle L \rangle}, \quad (6)$$

gdzie $\langle L \rangle$ jest średnią długością stałego podciągu w sygnale x_i^q (zatem N_{eff} wyraża liczbę zmian wartości próbek w przebiegu sygnału cyfrowego. W skrajnych przypadkach: $N_{\text{eff}} = N_S$ gdy żadna próbka nie jest równa poprzedniej, a $N_{\text{eff}} = 1$ gdy sygnał jest stały i wszystkie jego próbki mają jednakową wartość). Wygodnie jest posługiwać się znormalizowaną efektywną liczbą próbek N_{eff}/N_S , która przyjmuje wartości od $1/N_S \approx 0$ do 1.

W artykule [6] znormalizowaną liczbę próbek wyznaczano numerycznie. Zauważono także, że wszystkie otrzymane krzywe można „dopasować”, wyrażając je w funkcji wielkości, którą można by określić jako „zredukowana rozdzielczość”

$$v = n - \log_2 \frac{N_S}{K}. \quad (7)$$

Przedstawione dalej wyprowadzenie pozwala otrzymać wzór dosyć dokładnie odtwarzający te wyniki. Jego pierwszym krokiem jest obliczenie prawdopodobieństwa przejścia dla rozważanego sygnału.

Prawdopodobieństwo przejścia dla sygnału OFDM

Prawdopodobieństwem przejścia nazywa się prawdopodobieństwo przyjmowania przez kolejne próbki sygnału zadanych wartości. Zakładając, że właściwości statystyczne sygnału nie zmieniają się w czasie, prawdopodobieństwo przejścia dla sygnału cyfrowego x_i^q jest zdefiniowane jako

$$\mathcal{P}^q(p, p') = \mathcal{P}(x_0^q = p \wedge x_1^q = p'). \quad (8)$$

Analogicznie, dla sygnału x_i , który przyjmuje wartości ze zbioru ciągłego, zdefiniowana jest gęstość prawdopodobieństwa przejścia

$$\mathcal{P}(p_0, p_1) = \mathcal{P}(x_0 = p_0 \wedge x_1 = p_1). \quad (9)$$

Między tymi wielkościami zachodzi w oczywisty sposób związek:

$$\mathcal{P}^q(p, p') = \int_{p-\frac{1}{2}}^{p+\frac{1}{2}} dp_0 \int_{p'-\frac{1}{2}}^{p'+\frac{1}{2}} dp_1 \mathcal{P}(p_0, p_1). \quad (10)$$

Wyrażając prawdopodobieństwo koniunkcji przez prawdopodobieństwo warunkowe można napisać:

$$\mathcal{P}(p_0, p_1) = \mathcal{P}(x_1 = p_1 | x_0 = p_0) \mathcal{P}(x_0 = p_0). \quad (11)$$

Czynnik $\mathcal{P}(x_0 = p_0)$ wyraża się wzorem (4), natomiast wyrażenie na $\mathcal{P}(x_1 = p_1 | x_0 = p_0)$ można wprowadzić definiując

$$w(t) = x(t) - x_0 = \sum_{k=1}^K \operatorname{Re} \left\{ A_k e^{j\phi_k} \left(e^{j\omega_k t} - 1 \right) \right\}. \quad (12)$$

Wówczas

$$\mathcal{P}(x_1 = p_1 | x_0 = p_0) = \mathcal{P}(w(T) = p_1 - p_0 | x_0 = p_0). \quad (13)$$

Ponieważ $w(T)$ jest kombinacją liniową wielu niezależnych zmiennych losowych, z centralnego twierdzenia granicznego wynika, że prawdopodobieństwo przyjęcia przez $w(T)$ określonej wartości dane jest rozkładem Gaussa:

$$\mathcal{P}(w(T) = x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_w^2}\right), \quad (14)$$

przy czym wariancja

$$\sigma_w^2 = \langle w(T)^2 \rangle = 2\sigma^2 \left(1 - \frac{\cos \frac{(K+1)\pi}{N_S} \sin \frac{K\pi}{N_S}}{K \sin \frac{\pi}{N_S}} \right) \text{ (wyprowadzenie w dodatku).} \quad (15)$$

Zaniedbując zależność statystyczną między $w(T)$ i x_0 , można przybliżyć szukane prawdopodobieństwo warunkowe: $\mathcal{P}(w(T) = p_1 - p_0 | x_0 = p_0) \approx \mathcal{P}(w(T) = p_1 - p_0)$. Wówczas:

$$\mathcal{P}(p_0, p_1) \approx \frac{1}{2\pi\sigma_w\sigma} \exp\left(-\frac{(p_1 - p_0)^2}{2\sigma_w^2}\right) \exp\left(-\frac{p_0^2}{2\sigma^2}\right), \quad (16)$$

a zatem:

$$\mathcal{P}^q(p, p') = \frac{1}{2\pi\sigma_w\sigma} \int_{p-\frac{1}{2}}^{p+\frac{1}{2}} dp_0 \exp\left(-\frac{p_0^2}{2\sigma^2}\right) \int_{p'-\frac{1}{2}}^{p'+\frac{1}{2}} dp_1 \exp\left(-\frac{(p_1 - p_0)^2}{2\sigma_w^2}\right). \quad (17)$$

Całkę po p_1 można wyrazić za pomocą funkcji błędu

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dt e^{-t^2}, \quad (18)$$

po czym otrzymuje się:

$$\mathcal{P}^q(p, p') = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma^2} \int_{p-\frac{1}{2}}^{p+\frac{1}{2}} dp_0 \exp\left(-\frac{p_0^2}{2\sigma^2}\right) \left[\operatorname{erf}\left(\frac{p' - p_0 + \frac{1}{2}}{\sigma_w\sqrt{2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{p' - p_0 - \frac{1}{2}}{\sigma_w\sqrt{2}}\right) \right]. \quad (19)$$

Ponieważ wartość skuteczna sygnału $\sigma \gg 1$, można przyjąć, że przedział całkowania po p_0 jest na tyle wąski, że funkcja podcałkowa jest w nim praktycznie stała, wtedy ostatecznie:

$$\mathcal{P}^q(p, p') \approx \frac{1}{2\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{p^2}{2\sigma^2}\right) \left[\operatorname{erf}\left(\frac{p' - p + \frac{1}{2}}{\sigma_w \sqrt{2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{p' - p - \frac{1}{2}}{\sigma_w \sqrt{2}}\right) \right]. \quad (20)$$

Wynika stąd, że wartość sygnału nie zmienia się z prawdopodobieństwem

$$\mathcal{P}^q(p, p) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{p^2}{2\sigma^2}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2\sigma_w \sqrt{2}}\right). \quad (21)$$

Efektywna liczba próbek cyfrowego sygnału OFDM

Numerycznie, efektywną liczbę próbek sygnału cyfrowego x_i^q można policzyć śledząc przebieg realizacji tego sygnału i zliczając zmiany wartości próbek. Postępowaniu takiemu odpowiada następująca definicja tej wielkości:

$$N_{\text{eff}} = \left\langle 1 + \sum_{i=1}^{N_S-1} \left(1 - \delta_{x_{i-1}^q x_i^q}\right) \right\rangle. \quad (22)$$

Sumowane wyrazy z deltami Kroneckera przyjmują wartość 0 gdy kolejne dwie próbki są równe, przy założeniu niezmienności właściwości statystycznych sygnału, wynik takiego testu nie zależy od tego, na których próbkach zostaje on dokonany. Dlatego, korzystając z liniowości operatora wartości oczekiwanej, przy przyjętych założeniach dochodzi się do wyrażenia na znormalizowaną efektywną liczbę próbek:

$$\frac{N_{\text{eff}}}{N_S} = 1 - \left(1 - \frac{1}{N_S}\right) \langle \delta_{x_0^q x_1^q} \rangle. \quad (23)$$

Wartość oczekiwaną $\langle \delta_{x_0^q x_1^q} \rangle$ można obliczyć znając prawdopodobieństwo przejścia dla sygnału cyfrowego:

$$\langle \delta_{x_0^q x_1^q} \rangle = \sum_{p=-2^{n-1}}^{2^{n-1}-1} \mathcal{P}^q(p, p). \quad (24)$$

Wtedy:

$$\frac{N_{\text{eff}}}{N_S} \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2\sigma_w \sqrt{2}}\right) \left[2 \sum_{p=0}^{2^{n-1}} \exp\left(-\frac{p^2}{2\sigma^2}\right) - 1 \right]. \quad (25)$$

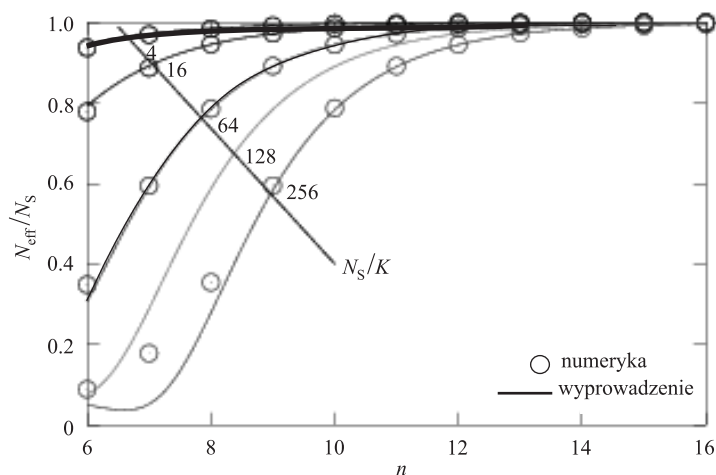
Funkcja wykładnicza pod sumą maleje na tyle powoli, że sumę po poziomach można dobrze przybliżyć przez całkę:

$$\sum_{p=0}^{2^{n-1}} \exp\left(-\frac{p^2}{2\sigma^2}\right) \approx \int_0^{2^{n-1}} dp \exp\left(-\frac{p^2}{2\sigma^2}\right) = \sqrt{\frac{\pi\sigma^2}{2}} \operatorname{erf}\left(\frac{2^{n-1}}{\sigma\sqrt{2}}\right), \quad (26)$$

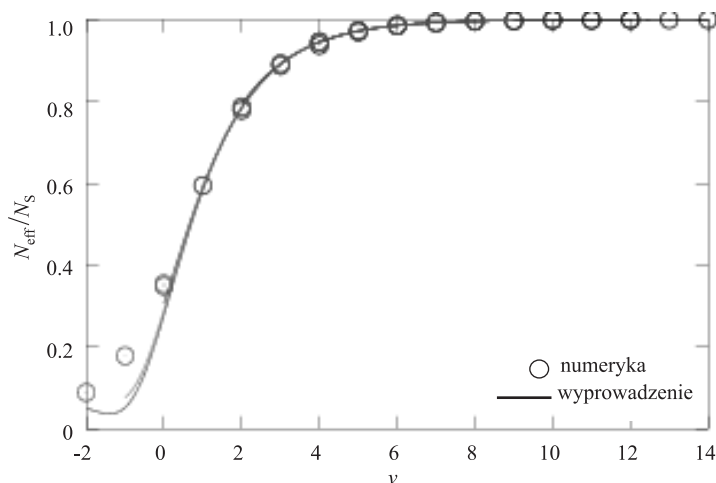
co prowadzi do wzoru w zamkniętej postaci:

$$\frac{N_{\text{eff}}}{N_S} \approx 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2\sigma_w \sqrt{2}}\right) \left[\operatorname{erf}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right]. \quad (27)$$

Wyrażenie to stanowi ostateczny wynik wyprowadzenia. Jego porównanie z wynikami numerycznymi pokazane jest na rys. 1 oraz rys. 2. Jak widać, wzór ten w większości przypadków daje bardzo dobre wyniki, istotniejsze niedokładności występują jedynie przy bardzo małej rozdzielczości n połączonej z bardzo dużym nadpróbkowaniem N_S/K , co odpowiada ujemnej rozdzielczości zredukowanej v .



Rys. 1. Znormalizowana efektywna liczba próbek sygnału N_{eff}/N_S w funkcji rozdzielczości przetwornika n : porównanie wyników numerycznych z pracy [6] i wyprowadzonego wzoru (27).



Rys. 2. Znormalizowana efektywna liczba próbek sygnału N_{eff}/N_S w funkcji zredukowanej rozdzielczości przetwornika v : porównanie wyników numerycznych z pracy [6] i wyprowadzonego wzoru (27).

Wyprowadzony wzór (27) warto poddać pewnym uproszczeniom, aby można było wyraźniej zauważyć związki między różnymi parametrami. Postępowanie takie ma sens w obszarze, w którym zgodność wzoru z odtwarzanymi wynikami nie budzi zastrzeżeń, tj. przy $v > 0$. Powszechnie uznane jest

przyjmowanie $\alpha \approx 4$, a dla tej wartości $\operatorname{erf}(\alpha/\sqrt{2}) \approx 1$. Od n zależy tylko drugi wyraz w nawiasie, odwrotnie proporcjonalny do σ , czyli malejący jak 2^{-n} . Wyraz ten jest mały i można go pominąć. Rozwijając funkcje trygonometryczne w wyrażeniu (15) na σ_w^2 do dwóch pierwszych wyrazów szeregu Maclaurina, a następnie zostawiając jedynie wyraz wiodący, otrzymuje się

$$\sigma_w \approx \frac{2^n \pi}{\alpha \sqrt{3}} \left(\frac{N_S}{K} \right)^{-1} = \frac{2^v \pi}{\alpha \sqrt{3}}. \quad (28)$$

Dla małych wartości argumentu x funkcja błędu $\operatorname{erf}(x) \approx 2x/\sqrt{\pi}$, zatem dla $v > 0$ dochodzi się do uproszczonego wzoru:

$$\frac{N_{\text{eff}}}{N_S} \approx 1 - \frac{\alpha \sqrt{3}}{2^n \sqrt{2\pi^3}} \frac{N_S}{K} = 1 - \frac{\alpha \sqrt{3}}{2^v \sqrt{2\pi^3}}. \quad (29)$$

Dokładność tego wzoru jest mała przy $v \approx 0$, ale szybko rośnie dla coraz większych v . Brak zależności od n i N_S/K innych, niż przez v , tłumaczy położenie wyników wzdłuż jednej krzywej (rys. 2).

Podsumowanie

Wyprowadzone wyrażenie (27) umożliwia obliczenie z dużą dokładnością efektywnej liczby próbek sygnału cyfrowego z multipleksacją OFDM. Stanowi ono uzupełnienie opracowania [6], sprowadzając część zaprezentowanego tam modelu do postaci całkowicie analitycznej. Otrzymany wzór wskazuje, że błędy związane z szybkozmienną częścią zniekształceń nieliniowych w typowych przetwornikach C/A o rozdzielczościach kilkunastu bitów i większych można wydajnie zmniejszać przez zwiększanie nadpróbkowania. Jednak nie dotyczy to przetworników o mniejszych rozdzielczościach, gdyż wówczas efektywna liczba próbek jest istotnie mniejsza od liczby próbek, zatem efekty nadpróbkowania słabną. Wniosek ten może mieć pewne praktyczne znaczenie przy konstruowaniu prostych systemów, w których z uwagi na koszty, albo z innych względów, nie można zastosować typowego przetwornika C/A. Przykładem takiego systemu może być ośmiobitowy mikrokontroler z drabinką rezystorową dołączoną do wyprowadzeń jednego z jego portów (szczególnie, jeżeli tylko część wyprowadzeń portu byłaby dostępna).

Podziękowanie

Prace nad zagadnieniami będącymi tematem artykułu były współfinansowane ze środków Programu Operacyjnego Innowacyjna Gospodarka, projekt nr POIG.01.01.02-00-014/08. Kilku cennych wskazówek udzielił dr Krzysztof Łatuszyński, za co autor składa serdeczne podziękowanie.

Dodatek – wyprowadzenie wyrażenia (15)

Wariancję σ_w^2 zmiennej losowej $w(T)$ można obliczyć wykonując przytoczony poniżej rachunek. Wartość średnia $w(T)$ zdefiniowanego wzorem (12)

$$\langle w(T) \rangle = \sum_{k=1}^K \operatorname{Re} \left\{ \langle A_k \rangle \langle e^{j\phi_k} \rangle (e^{j\omega_k T} - 1) \right\} = 0, \quad (30)$$

ponieważ zgodnie z założeniem A_k i ϕ_k są niezależne oraz $\langle e^{j\phi_k} \rangle = 0$ dla każdego k . Wariancja σ_w^2 jest zatem równa średniemu kwadratowi $w(T)$:

$$\sigma_w^2 = \langle w(T)^2 \rangle = \left\langle \left[\sum_{k=1}^K \operatorname{Re} \left\{ A_k e^{j\phi_k} (e^{j\omega_k T} - 1) \right\} \right]^2 \right\rangle. \quad (31)$$

Wygodnie jest kwadrat sumy rozpaść jako iloczyn sum po różnych wskaźnikach:

$$\left[\sum_{k=1}^K \operatorname{Re} \left\{ A_k e^{j\phi_k} (e^{j\omega_k T} - 1) \right\} \right]^2 = \sum_{k=1}^K \operatorname{Re} \left\{ A_k e^{j\phi_k} (e^{j\omega_k T} - 1) \right\} \sum_{l=1}^K \operatorname{Re} \left\{ A_l e^{j\phi_l} (e^{j\omega_l T} - 1) \right\}, \quad (32)$$

a ponieważ operatory sumowania części rzeczywistej oraz wartości średniej są liniowe, można poprzestawiać ich kolejność otrzymując wyrażenie:

$$\langle w(T)^2 \rangle = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K \left\langle A_k e^{j\phi_k} (e^{j\omega_k T} - 1) A_l \operatorname{Re} \left\{ e^{j\phi_l} (e^{j\omega_l T} - 1) \right\} \right\rangle \right\}, \quad (33)$$

w którym wykorzystano, że A_l jest rzeczywiste. Warto w tym punkcie zauważyć, że dla każdego wyrazu, w którym $l \neq k$, ze względu na niezależność zmiennych losowych A_k , A_l , ϕ_k i ϕ_l wartość oczekiwana pod sumą jest równa iloczynowi

$$\langle A_k A_l \rangle \langle e^{j\phi_k} \rangle \langle e^{j\omega_k T} - 1 \rangle \operatorname{Re} \left\{ \langle e^{j\phi_l} \rangle \langle e^{j\omega_l T} - 1 \rangle \right\} = 0, \quad (34)$$

gdzie wykorzystane zostało założenie, że $\langle e^{j\phi_k} \rangle = \langle e^{j\phi_l} \rangle = 0$. Pozostają zatem jedynie wyrazy, w których $l = k$, tj.:

$$\langle w(T)^2 \rangle = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^K \langle A_k^2 \rangle \langle e^{j\omega_k T} - 1 \rangle \langle e^{j\phi_k} \operatorname{Re} \left\{ e^{j\phi_k} (e^{j\omega_k T} - 1) \right\} \rangle \right\}. \quad (35)$$

Następnie, $\langle A_k^2 \rangle$ można wyznaczyć ze wzoru (2), część rzeczywistą zaś wewnątrz pozostałej wartości oczekiwanej rozpaść według wzoru $\operatorname{Re} \{z\} = (z + z^*)/2$, po czym daje się ona policzyć:

$$\langle e^{j\phi_k} \operatorname{Re} \left\{ e^{j\phi_k} (e^{j\omega_k T} - 1) \right\} \rangle = \frac{1}{2} \langle e^{2j\phi_k} (e^{j\omega_k T} - 1) + (e^{-j\phi_k} (e^{j\omega_k T} - 1)) \rangle = \frac{1}{2} \langle e^{-j\omega_k T} - 1 \rangle, \quad (36)$$

co wynika z założenia, że $\langle e^{2j\phi_k} \rangle = 0$. Ponieważ $\omega_k T = 2\pi k/N_S$, otrzymuje się:

$$\langle w(T)^2 \rangle = \frac{\sigma^2}{K} \sum_{k=1}^K \left| \exp \left(\frac{2\pi j k}{N_S} \right) - 1 \right|^2 = 2\sigma^2 \left(1 - \frac{1}{K} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^K \exp \left(\frac{2\pi j k}{N_S} \right) \right\} \right). \quad (37)$$

Ze wzoru na sumę K pierwszych wyrazów szeregu geometrycznego wynika:

$$\operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^K \exp \left(\frac{2\pi j k}{N_S} \right) \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\exp \left(\frac{(2K+1)\pi j}{N_S} \right) - \exp \left(\frac{\pi j}{N_S} \right)}{\exp \left(\frac{\pi j}{N_S} \right) - \exp \left(-\frac{\pi j}{N_S} \right)} \right\} = \frac{\sin \frac{(2K+1)\pi}{N_S} - \sin \frac{\pi}{N_S}}{2 \sin \frac{\pi}{N_S}}. \quad (38)$$

Stosując do licznika wzór na różnicę sinusów:

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} \quad (39)$$

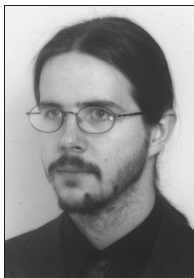
i wykorzystując tak otrzymany wynik dochodzi się do wyrażenia (15), natomiast skracając $\sin \frac{\pi}{N_S}$ otrzymuje się jego inną formę:

$$\sigma_w^2 = \langle w(T)^2 \rangle = 2\sigma^2 \left(1 + \frac{1}{2K} - \frac{\sin \frac{(2K+1)\pi}{N_S}}{2K \sin \frac{\pi}{N_S}} \right). \quad (40)$$

Bibliografia

- [1] Chang R.W.: *High-speed multichannel data transmission with bandlimited orthogonal signals*. Bell Sys. Tech. J., 1966, z. 45, s. 1775–1796
- [2] Saltzberg B.R., *Performance of an efficient parallel data transmission system*. IEEE T. Commun. Technol., 1967, z. 15, s. 805–811
- [3] Weinstein S.B., Ebert P.M., *Data transmission by frequency-division multiplexing using the discrete Fourier transform*. IEEE T. Commun. Technol., 1971, z. 19, s. 628–634
- [4] Gross R., Veeneman D.: *SNR and spectral properties for a clipped DMT ADSL signal*. 1994 IEEE ICC Conf. Rec., 1994, z. 2, s. 843–847
- [5] Mehrnia A.: *Optimum DAC resolution for WMAN, WLAN and WPAN OFDM-based standards*. 2005 ICCE Dig. Techn. Papers, 2005, s. 355–356
- [6] Rudziński A., Kozłowski S.: *Wymagania na rozdzielczość i nieliniowość przetwornika C/A dla sygnału OFDM*. Telekomunikacja i Techniki Informacyjne, 2010, nr 3-4, s. 78–93

Adam Rudziński



Dr inż. Adam Rudziński (1980) – absolwent Wydziału Elektroniki i Technik Informacyjnych Politechniki Warszawskiej (2004) oraz Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego (2009); prace naukowe i badawczo-rozwojowe w Instytucie Mikroelektroniki i Optoelektroniki PW oraz w Instytucie Radioelektroniki PW; autor lub współautor ponad 20 publikacji naukowych; zainteresowania naukowe: modelowanie układów elektronicznych i zjawisk w nich występujących, konstrukcje urządzeń elektronicznych, oddziaływanie promieniowania elektromagnetycznego z materią, optyka kwantowa; praca zawodowa: projektowanie układów i urządzeń elektronicznych, aktualnie projektant w SKA Polska Sp. z o.o.

e-mail: adam.rudzinski@ire.pw.edu.pl, a.rudzinski@ska-polska.pl